Mat. Dif Denk I Quiz 05.02.2018

1) $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ denklemi TD olsun.
Bu durumda $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$, $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$
eşitliklerini sağlayan $u(x,y)$ fonksiyonunun
var mı, yok mu varsa tek mi, çok mu olduğunu gösteriniz.

2) Öyle bir diferansiyel denklem yazınız ki, bu denklem hem DA, hem SDH ve hem de TD olsun.

3) $xy^2dx + Q(x,y)dy = 0$ denkleminin TD ve SDH olması için $Q(x,y)$ fonksiyonu ne olmalıdır. Bulunuz.

4) $f(x,y)$ fonksiyonu SDH ise $f(x,ux) = f(1,u)$ old. gösteriniz

Not: Sadece iki soru seçerek cevaplandırınız. Başarılar

N.A

Çözümler

1) Denklem TD olduğundan TD tanımı gereği
$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$, $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$ şartını sağlayan $u(x,y)$ vardır. $u_c(x,y) = u(x,y) + c$ c keyfi sabit olmak üzere
$\frac{\partial u_c(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial (u(x,y)+c)}{\partial x} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial c}{\partial x}}_{=0} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P(x,y)$, Benzer şekilde
$\frac{\partial u_c(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial (u(x,y)+c)}{\partial y} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$ olur. Buna göre bu
iki eşitliği sağlayan $u(x,y)$ varsa çoktur.

2) $y' = 1$ alalım. Bu denkl. DA, SDH ve $dy - dx = 0$ old.
TD dir. Bir başka $y' = -\frac{x}{y}$ alınabilir. Bu denk DA, SDH ve
TD dir. $ydy + xdy = 0$ yazılırsa TD dir.

3) $xy^2dx + Q(x,y)dy = 0$ den TD old. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ dir. $P(x,y) = xy^2$
$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial (xy^2)}{\partial y} = 2xy \Rightarrow \int \frac{\partial Q}{\partial x}dx = \int 2xy\,dx$
$Q(x,y) = x^2y + h(y)$ olur. O halde $xy^2dx + (x^2y + h(y))dy = 0$
denk. TD dir. Bu denklemin aynı zamanda SDH

4) $f(x,y)$ SDH olduğundan

$f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$ eşitliği sağlanır. Bu eşitlikte

λ yerine x, x yerine 1, y yerine u yazılırsa

$f(x \cdot 1, x \cdot u) = f(1,u)$ yani $f(x, xu) = f(1,u)$ olduğu görülür.

Not: 3 üncü soruda $h(y) = 0$ alınırsa yani denklem $xy^2 dx + x^2 y dy = 0$ şeklinde alınırsa bu denklem TD ve SDH nin dışında aynı zamanda DA dır. Yani $xy^2 dx + x^2 y dy = 0$ denklemi hem ikinci hemde üçüncü soru için çözümdür.